平成30年度

高等学校【数　学】解答用紙

正解・解答例

（その1）

1　各１０点×３（各完答　ただし，(1)は$x=-8-17k$かつ$y=25+53k$を満たすものであれば可）

(1)	$x=-8,\ y=25$	(2)	$x>2$	(3)	$a=59,\ b=62,\ c=65$

1

３０点

2　各２５点×２

(1)

$y=f(x)$とおくと，$f(x)=-(x+2a)^2+4a^2+a$

したがって，$y=f(x)$は上に凸で頂点$(-2a,4a^2+a)$のグラフであり，

$f(0)=a$，$f(4)=-15a-16$ だから，最大値，最小値は次のようになる。

(i) $-2a\geqq 4$ 即ち $a\leqq -2$のとき

$x=4$のとき　最大値$f(4)=-15a-16$

$x=0$のとき　最小値$f(0)=a$

(ii) $2<-2a<4$ 即ち $-2<a<-1$のとき

$x=-2a$のとき　最大値$f(-2a)=4a^2+a$

$x=0$のとき　最小値$f(0)=a$

(iii) $-2a=2$ 即ち $a=-1$のとき

$x=2$のとき　最大値$f(2)=3$

$x=0$，4のとき　最小値$f(0)=f(4)=-1$

(iv) $0<-2a<2$ 即ち $-1<a<0$のとき

$x=-2a$のとき　最大値$f(-2a)=4a^2+a$

$x=4$のとき　最小値$f(4)=-15a-16$

(V) $-2a\leqq 0$ 即ち $a\geqq 0$のとき

$x=0$のとき　最大値$f(0)=a$

$x=4$のとき　最小値$f(4)=-15a-16$

答

(2)

数列$\{a_n\}$の初項をa，公差をd，数列$\{b_n\}$の初項をb，公比をrとすると，条件より

$$\begin{cases} a+2d=3 & \cdots① \\ a+7d=13 & \cdots② \end{cases} \qquad \begin{cases} br=3 & \cdots③ \\ br^4=81 & \cdots④ \end{cases}$$

①，②より　$a=-1$，$d=2$　だから　$a_n=2n-3$

③，④，rは実数より　$b=1$，$r=3$　だから　$b_n=3^{n-1}$

よって，$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n-3}{3^{n-1}}$

ゆえに　$S_n=-1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-5}{3^{n-2}}+\dfrac{2n-3}{3^{n-1}}$ $\cdots⑤$

⑤×$\dfrac{1}{3}$より

$\dfrac{1}{3}S_n=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{5}{3^4}+\cdots+\dfrac{2n-5}{3^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{3^n}$ $\cdots⑥$

⑤－⑥より

$\dfrac{2}{3}S_n=-1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{2}{3^4}+\cdots+\dfrac{2}{3^{n-2}}+\dfrac{2}{3^{n-1}}-\dfrac{2n-3}{3^n}$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{3}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3} \\ &\quad +\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\frac{1}{3^{n-2}}-\frac{2n-3}{2\cdot 3^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-3}{2\cdot 3^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-2}}\right)-\frac{2n-3}{2\cdot 3^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}-\frac{n}{3^{n-1}}+\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}} \\ &= -\frac{n}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

$\cdots$答

2

５０点

受　験 番　号		得　点 その１	８０点

平成30年度

高等学校【数　学】解答用紙

正解・解答例

（その2）

3　各20点×2

(1)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$　$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。

$t=\frac{1}{2}$のとき，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

また，条件より $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\vec{c}$

3点P，Q，Rを通る平面上に点Sがあるので

$\overrightarrow{PS}=m\overrightarrow{PQ}+n\overrightarrow{PR}$（$m$，$n$は実数）とおける。

これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}&=\overrightarrow{OP}+m\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right)+n\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\right)\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+m\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)+n\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\\&=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}m-\frac{2}{3}n\right)\vec{a}+\frac{m}{2}\vec{b}+\frac{n}{2}\vec{c}\cdots①\end{aligned}$$

今，4点O，A，B，Cは同一平面上になく，点Sは辺BC上にあるので，$\overrightarrow{OS}$は$\vec{b}$と$\vec{c}$を用いて表せる。したがって，①より

$$\begin{cases}\frac{2}{3}-\frac{1}{6}m-\frac{2}{3}n=0\cdots②\\ \frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1\qquad\cdots③\end{cases}$$

②，③より $m=\frac{4}{3}$，$n=\frac{2}{3}$

よって，①より $\overrightarrow{OS}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ とおけるから，

BS：SC＝1：2　…$\boxed{答}$

(2)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$　$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。

点Qは辺ABを $t:(1-t)$ に内分する点だから

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

また，点Gは△PQRの重心だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\frac{2}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}-t\right)\vec{a}+\frac{1}{3}t\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdots④\end{aligned}$$

3点O，G，Dは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OG}$（$k$は実数）…⑤と表せる。

ここで④より

$\overrightarrow{OD}=\frac{k}{3}\left(\frac{5}{3}-t\right)\vec{a}+\frac{k}{3}t\vec{b}+\frac{k}{6}\vec{c}$

4点O，A，B，Cは同一平面上になく，点Dは平面ABC上にあるので，

$\frac{k}{3}\left(\frac{5}{3}-t\right)+\frac{k}{3}t+\frac{k}{6}=1$

よって，$\frac{5}{9}k+\frac{k}{6}=1$

ゆえに，$k=\frac{18}{13}$

このとき，⑤は $\overrightarrow{OD}=\frac{18}{13}\overrightarrow{OG}$ となり，OG：GD＝13：5

これよりOG：GDは点Qの位置によらず一定であることが示された。　…$\boxed{証明終}$

3
40点

受験番号		得点 その2	40点

平成30年度

正解・解答例

(その3)

高等学校【数　学】解答用紙

4　(1) １０点　(2) ２５点　(3) ２０点　(4) ２５点

(1)

$f(x)=xe^{-x}$ より $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$ だから

$f'(t)=(1-t)e^{-t}$

よって，求める接線の方程式は

$y=(1-t)e^{-t}(x-t)+te^{-t}$ より $y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$ $\cdots\boxed{答}$

(2)

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$ より $f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$ を満たす x は，$(1-x)e^{-x}=0$ より $x=1$

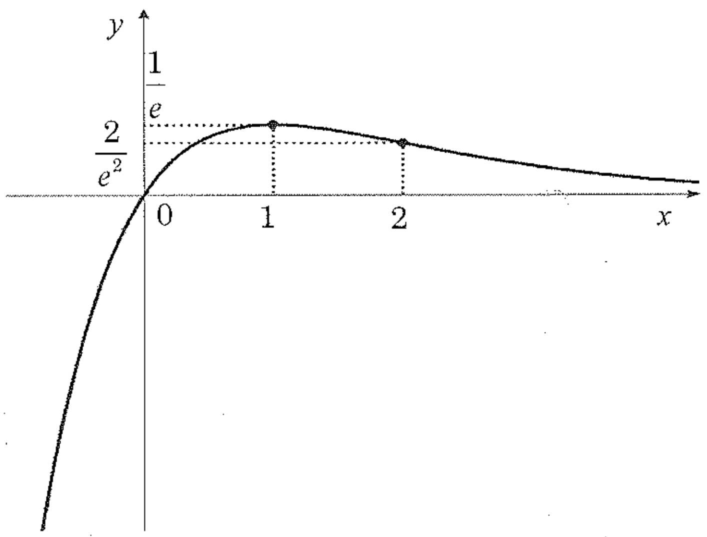
$f''(x)=0$ を満たす x は，$(x-2)e^{-x}=0$ より $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↱	極大	↴	変曲点	↳

増減表は上のようになるから，変曲点は $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ $\cdots\boxed{答}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ だから漸近線は $y=0$ $\cdots\boxed{答}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは下のようになる。



(3)

(1) より $g(t)=t^2e^{-t}$ とすると

$g'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$g'(t)=0$ を満たす t は，$t\geqq 0$，$e^{-t}>0$ より $t=0,2$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	0	↗	極大	↘

増減表は上のようになるから

$t=2$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{e^2}$ $\cdots\boxed{答}$

(4)

(3) より $t=2$ のとき

接点は $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$

また，接線 ℓ_0 は (1) より

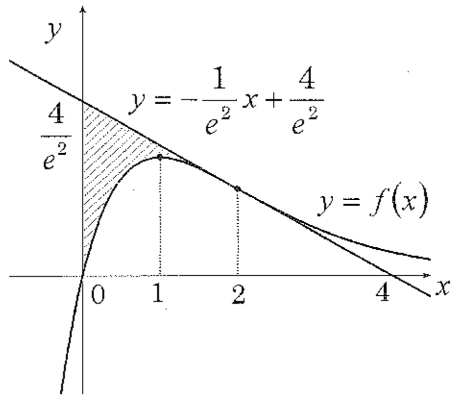
$y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$

よって，

接線 ℓ_0 と曲線 $y=f(x)$ と

y 軸とで囲まれた部分は

右図の斜線部分である。



したがって，求める体積 V は

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{4}{e^2}\right)^2\times4-\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{2}{e^2}\right)^2\times2-\pi\int_0^2\left(xe^{-x}\right)^2dx$$

$$=\frac{56}{3e^4}\pi-\pi\int_0^2x^2e^{-2x}dx$$

$$=\frac{56}{3e^4}\pi-\pi\int_0^2x^2\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{56}{3e^4}\pi+\frac{1}{2}\pi\left[x^2e^{-2x}\right]_0^2-\pi\int_0^2xe^{-2x}dx$$

$$=\frac{56}{3e^4}\pi+\frac{2}{e^4}\pi-\pi\int_0^2x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{62}{3e^4}\pi+\frac{1}{2}\pi\left[xe^{-2x}\right]_0^2-\frac{1}{2}\pi\int_0^2e^{-2x}dx$$

$$=\frac{62}{3e^4}\pi+\frac{1}{e^4}\pi-\frac{1}{2}\pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{65}{3e^4}\pi+\frac{1}{4}\pi\left(e^{-4}-1\right)$$

$$=\frac{263}{12e^4}\pi-\frac{1}{4}\pi=\left(\frac{263}{12e^4}-\frac{1}{4}\right)\pi \quad\cdots\boxed{答}$$

4
８０点

受　験 番　号		得　点 その３	８０点	得　点 合　計	２００点