平成31年度

正解・解答例

高等学校【数　学】解答用紙

（その1）

1　(1)　2点×5　(2)　3点×5　(3)　14点　(4)　14点

(1)

①	※	②	※	③	※	④	※	⑤	※

※（1）①〜⑤は全員正解とする。

(2)

①	数学のよさ	②	数学的論拠	③	多面的	④	表現	⑤	体系的

(3)

行番号（　③　）以降が誤っている

訂正した解答）

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\left(-3-\dfrac{3}{x}\right)}{(-x)\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}+(-x)\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{3}{2}$$ …答

(4)

解答例）

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=3$ で極小値 -25 をとるので

$f'(3)=0,\ f(3)=-25$

したがって

$27+6a+b=0$　……①

$29+9a+3b=-25$　……②

①，②を解いて

$a=-3,\ b=-9$

加　筆　部　分

〈加筆部分の解答欄〉

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$

逆にこの3次関数が条件を満たすことを示す。

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$ とすると，　$x=-1,3$

3次関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

したがって3次関数 $f(x)$ は

$x=-1$ で極大値 7　$x=3$ で極小値 -25 をとり，

条件を満たす。

よって、　$a=-3,\ b=-9$　…答

1　53点

2　8点×4

(1)	$a=-1$　，$b=-5$	(2)	$\dfrac{7}{22}$
(3)	27 と 324　，81 と 108	(4)	$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$　，　$\dfrac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

2　32点

受験番号		得点 その1	85点

平成31年度

正解・解答例

（その２）

高等学校【数　学】解答用紙

3 (1)（ｉ）１５点（ⅱ）１０点（ⅲ）１０点　(2)（ｉ）１５点（ⅱ）１５点

(1)

(ｉ)

証明）

X のデータは次の n 個の値である。

$X_1=2x_1-3$，$X_2=2x_2-3$，　$\cdots$　，$X_n=2x_n-3$

また，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$　であるから

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\{(2x_1-3)+(2x_2-3)+\cdots+(2x_n-3)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)-3n\}$$

$$=2\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-3$$

$=2\overline{x}-3$　　ゆえに　$\overline{X}=2\overline{x}-3$　終

(ⅱ)	$s_Y=3s_y$
(ⅲ)	-6

(2)

(ｉ)

初項 a_1 は　$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$$

$$=4n+1\quad\cdots\ ①$$

①で $n=1$ とすると，$a_1=5$ となり

①は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=4n+1$　…　答

(ⅱ)

$b_{n+1}-b_n=a_n$　より

数列 $\{b_n\}$ の階差数列は $\{a_n\}$　となる。

よって

$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=2n^2-n\quad\cdots\ ②$$

②で $n=1$ とすると，$b_1=1$ となり

②は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$b_n=2n^2-n$　…　答

3
６５点

受　験 番　号		得　点 その２	６５点

平成31年度

正解・解答例

高等学校【数　学】解答用紙

（その3）

4 (1)　１０点　(2)　２０点

(1)

$\overrightarrow{OA}=(1,1,-1)$，　$\overrightarrow{OB}=(4,-2,0)$　であるから

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot4+1(-2)+(-1)\cdot0=2$

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2\cdot(2\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{14}$　…　答

(2)

点Hは平面OAB上にあるので

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　となる実数s，tがある。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(1,1,-1)+t(4,-2,0)$

$=(s+4t,s-2t,-s)$

また　$\overrightarrow{OC}=(0,-1,-2)$　であるから

$\overrightarrow{CH}=(s+4t,s-2t+1,-s+2)$

さらに　$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$　であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$(s+4t)\cdot1+(s-2t+1)\cdot1+(-s+2)(-1)=0$

すなわち　$3s+2t-1=0$　…　①

また　$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$　であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$(s+4t)\cdot4+(s-2t+1)(-2)+(-s+2)\cdot0=0$

すなわち　$s+10t-1=0$　…　②

①，②より　$s=\dfrac{2}{7}$，$t=\dfrac{1}{14}$

よって　$\overrightarrow{CH}=\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{8}{7},\dfrac{12}{7}\right)$　となるので

$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{7}\right)^2+\left(\dfrac{8}{7}\right)^2+\left(\dfrac{12}{7}\right)^2}=\dfrac{4}{7}\sqrt{14}$

求める体積Vは

$V=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CH}|\cdot S=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{7}\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}=\dfrac{8}{3}$　…　答

4
３０点

受験番号		得点 その3	３０点

高等学校【数　学】解答用紙

5 (1)　１０点　(2)　２５点　(3)　８点　(4)　１５点　(5)　１２点

(1)

証明）

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$　と表される。

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|\sqrt{h+3}}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h\sqrt{h+3}}{h}=\sqrt{3}$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|\sqrt{h+3}}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h\sqrt{h+3}}{h}=-\sqrt{3}$$

$x=0$ において，右側からの極限と左側からの極限が一致しないから，$f'(0)$ は存在しない。

すなわち関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。　$\boxed{\text{終}}$

(2)

定義域は $x\geqq -3$ である。

$x\geqq 0$ のとき　$y=x\sqrt{x+3}$

$x>0$　で　　$y'=\sqrt{x+3}+x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

また　　$y''=\dfrac{3\cdot 2\sqrt{x+3}-(3x+6)\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}}{4(x+3)}=\dfrac{3(x+4)}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$

よってこのとき　$y'>0$，$y''>0$

$-3\leqq x<0$　のとき　$y=-x\sqrt{x+3}$

$-3<x<0$　で　$y'=-\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$　　$y''=-\dfrac{3(x+4)}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$

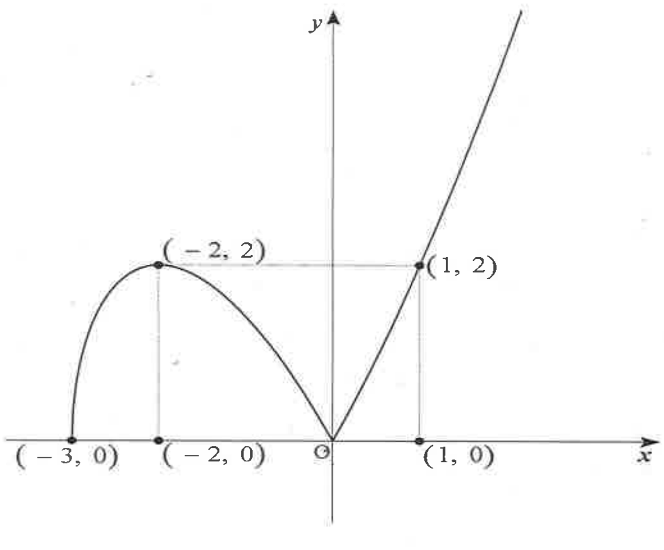
よってこのとき　$y'=0$ とすると $x=-2$，また　$y''<0$

したがって，y'，y''　の符号を調べて増減，凹凸の表をつくると次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y''	／	$-$	$-$	$-$	／	$+$
y	0	↱	2	↴	0	⬏

よって，$x=-2$　で極大値２　$x=0$　で極小値０　をとる。

$y=f(x)$ のグラフは以下のとおり。



(3)

$-3\leqq x<0$　のとき　$f(x)=-x\sqrt{x+3}$

$-3<x<0$　で

$f'(x)=-\dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$，　よって　$f'(-1)=-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

求める接線の方程式は　$y-\sqrt{2}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(x+1)$

すなわち　$y=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　…　$\boxed{\text{答}}$

(4)

$$S=\int_{-3}^{1}|x|\sqrt{x+3}\,dx$$
$$=-\int_{-3}^{0}x\sqrt{x+3}\,dx+\int_{0}^{1}x\sqrt{x+3}\,dx$$

ここで，$\sqrt{x+3}=t$　とおくと　$t^2=x+3$　つまり　$2t\dfrac{dt}{dx}=1$

また，x と t の対応表は次のようになる。

x	$-3\ \to\ 0$
t	$0\ \to\ \sqrt{3}$

x	$0\ \to\ 1$
t	$\sqrt{3}\ \to\ 2$

$$S=-\int_{0}^{\sqrt{3}}(t^2-3)\cdot t\cdot 2t\,dt+\int_{\sqrt{3}}^{2}(t^2-3)\cdot t\cdot 2t\,dt$$
$$=2\int_{\sqrt{3}}^{0}(t^4-3t^2)dt+2\int_{\sqrt{3}}^{2}(t^4-3t^2)dt$$
$$=2\left[\frac{1}{5}t^5-t^3\right]_{\sqrt{3}}^{0}+2\left[\frac{1}{5}t^5-t^3\right]_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{24}{5}\sqrt{3}-\frac{16}{5}\quad\cdots\ \boxed{\text{答}}$$

(5)

$$（与式）=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}k\sqrt{k+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{\frac{k}{n}+3}$$
$$=\int_{0}^{1}x\sqrt{x+3}\,dx$$

ここで，$\sqrt{x+3}=t$　とおくと　$t^2=x+3$　つまり　$2t\dfrac{dt}{dx}=1$

また，x と t の対応表は次のようになる。

x	$0\ \to\ 1$
t	$\sqrt{3}\ \to\ 2$

$$（与式）=\int_{\sqrt{3}}^{2}(t^2-3)\cdot t\cdot 2t\,dt$$
$$=\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{16}{5}\qquad\cdots\ \boxed{\text{答}}$$

5
７０点

受験番号		得点その４	７０点	得点合計	２５０点