令和３年度

高等学校【数　学】解答用紙

（その１）

1　(1) 2点、(2)各2点×3　(3)各4点×3

(1)	エ	(2)	①	ウ	②	カ	③	ア

(3)	①	基本的な概念	②	創造性	③	数学的論拠

1　20点

2　各8点×5

(1)	377	(2)	$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$	(3)	$-4<a\leqq-3,\ 5\leqq a<6$
(4)	14通り	(5)	31桁		

2　40点

3　20点

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)\ —①$$

ここで $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ とすると ①は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$\sqrt{1+x}=t$ とおくと

$1+x=t^2$

$dx=2t\,dt$ となり

x	$0\to1$
t	$1\to\sqrt{2}$

これより

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t}\times2t\,dt$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}2\,dt$$

$$=2\left[t\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)=2\sqrt{2}-2$$

3　20点

受験番号		得点 その1	80点

令和３年度

高等学校【数　学】解答用紙

（その２）

4 (1) 6点 (2) 10点、(3) 14点、

(1)

$a_n = 46 + (n-1)\times(-3)$

$= 49 - 3n$

よって求めたい一般項 a_n は

$a_n = 49-3n$

(2) $a_n \geqq 0$ となる n を求める。

$49-3n \geqq 0$ より　$n \leqq \dfrac{49}{3} = 16.33\cdots$

よって第16項までの和が最大となる。

ここで $a_{16} = 49-3\times16 = 1$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_{16} = \dfrac{16}{2}(46+1)$

$= 8\times47$

$= 376$

まとめると

第16項までの和が最大、その和376

(3) (2)より第17項から第32項までが負となる。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{32}|a_k| = (a_1+a_2+\cdots+a_{16}) - (a_{17}+a_{18}+\cdots+a_{32})$

$= S_{16} - (S_{32} - S_{16})$

$= 2S_{16} - S_{32}$

$= 2\times8\times47 - \dfrac{32}{2}\{46+(-47)\}$

$(\because a_{32} = 49-3\times32 = -47)$

$= 2\times8\times47 + 16$

$= 768$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{32}|a_k| = 768$

4

30点

5 (1) 12点 (2) 8点 (3) 20点

(1) $AC=x$ とする。条件より $\angle ABC=\angle ACB=72^\circ$ だから $\angle BAC=36^\circ$。また線分BDは $\angle ABC$ の二等分線より $\angle ABD=36^\circ$。よって $\triangle ABD$ は $AD=BD$ の二等辺三角形。

よって $CD=x-1$

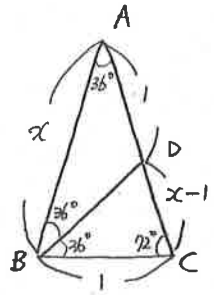
また $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ なので

$AC:BC = BC:CD$

$x:1 = 1:(x-1)$

$x^2-x-1=0$

これを解くと　$x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$



$x>0$ より

$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

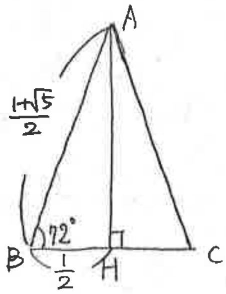
よって $AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) 頂点Aから辺BCへ下ろした垂線と辺BCとの交点をHとする。

$\cos72^\circ = \dfrac{BH}{AB}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



よって $\cos72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

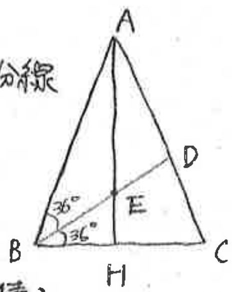
(3)

直線AHは二等辺三角形ABCの底辺BCの垂直二等分線でもあるから

$(\triangle ABH\text{の面積}) = \dfrac{1}{2}S$

ここで直線BDは $\angle ABC$ の二等分線より、$AE:EH = AB:BH$

よって



$(\triangle ABE\text{の面積})$

$= \dfrac{AB}{AB+BH}\times(\triangle ABH\text{の面積})$

$= \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{2}S$

$= \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}S$

よって $(\triangle ABE\text{の面積}) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}S$

5

40点

受験番号		得点 その２	70点

令和３年度

高等学校【数　学】解答用紙

（その3）

6　(1) 8点　(2) 12点

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & —① \\ x+3y=5 & —② \end{cases}$$

②を①に代入して

$(5-3y)^2+y^2=25$

$10y(y-3)=0$

$\therefore y=0,\ 3$

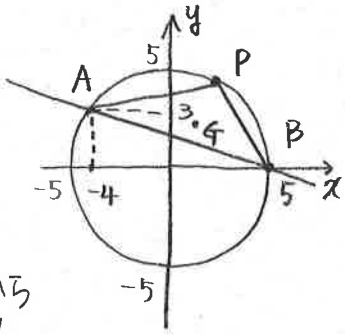
$y=0$のとき ②より $x=5$

$y=3$のとき ②より $x=-4$

ゆえに求めたい座標はそれぞれ

$A(-4,\ 3)$，$B(5,\ 0)$

(2)



円周上の点$P(p,\ q)$

重心$G(X,\ Y)$とする。

点PはC上の点より

$p^2+q^2=25$ —③

△ABPの重心がGであるから

$$\begin{cases} X=\dfrac{-4+5+p}{3}=\dfrac{p+1}{3} \\ Y=\dfrac{3+0+q}{3}=\dfrac{q+3}{3} \end{cases} —④$$

④より $p=3X-1$，$q=3Y-3$

これを③に代入して

$(3X-1)^2+(3Y-3)^2=25$

$\left(X-\frac{1}{3}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{25}{9}$

点Pが点A, Bと重なるとき 重心Gは存在しない。

$P(5,\ 0)$のとき $G(2,\ 1)$

$P(-4,\ 3)$のとき $G(-1,\ 2)$

まとめると．求める軌跡は

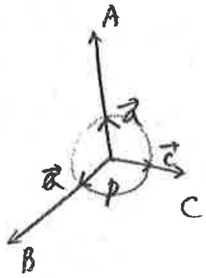
中心$\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$，半径$\frac{5}{3}$の円

ただし．$(2,\ 1)$，$(-1,\ 2)$を除く

6　20点

7　20点

$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$と同じ方向の単位ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とする。



与えられた条件式より

$\vec{a}+\vec{b}+\sqrt{2}\vec{c}=\vec{0}$ —①

①より

$\vec{a}+\vec{b}=-\sqrt{2}\vec{c}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=2|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2|\vec{c}|^2$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$(\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1)$

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle APB=0$ となり

$\cos\angle APB=0$

$0^\circ<\angle APB<180^\circ$より　$\angle APB=90^\circ$

同様に①より

$\vec{a}+\sqrt{2}\vec{c}=-\vec{b}$

$|\vec{a}+\sqrt{2}\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2+2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+2|\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　$(\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle APC=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\angle APC=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<\angle APC<180^\circ$より　$\angle APC=135^\circ$

よって

$\angle APB=90^\circ$　$\angle APC=135^\circ$

7　20点

受験番号		得点 その3	40点

8　(1)① 20点、② 10点、(2) 10点、(3)① 10点、② 10点、

(1)①

$f'(x) = (2x+1)e^x$

$f'(x)=0$ とすると $e^x>0$ より $x=-\frac{1}{2}$

$f''(x) = (2x+3)e^x$

$f''(x)=0$ とすると $e^x>0$ より $x=-\frac{3}{2}$

x	…	$-\frac{3}{2}$	…	$-\frac{1}{2}$	…
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{4}{e\sqrt{e}}$	↘	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	↗

$\lim_{x\to\infty}(2x-1)e^x=\infty$

$x=-t$ とおくと

$\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{e^t}=0$

これより

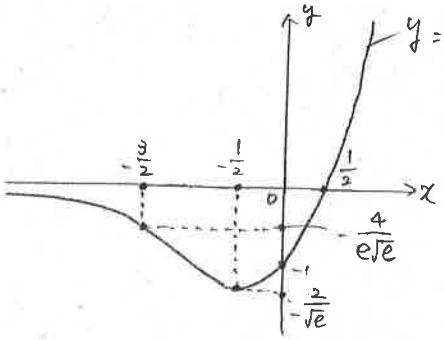
x軸は漸近線

増減表より

$x=-\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{2}{\sqrt{e}}$

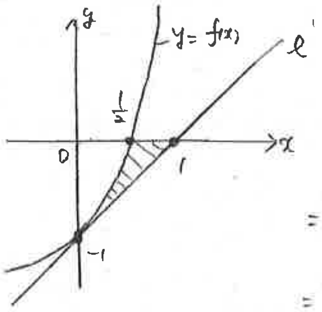
変曲点 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{4}{e\sqrt{e}}\right)$

また, $y=f(x)$のグラフは下図。



②

$f'(0)=1$ だから ℓの方程式は $y=x-1$



図より求める面積は

$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\int_0^{\frac{1}{2}}\{-(2x-1)e^x\}dx$

$=\frac{1}{2}+\left[(2x-1)e^x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2e^x dx$

$=\frac{1}{2}+(0+1)-2\left[e^x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}-2(\sqrt{e}-1)$

$=\frac{7}{2}-2\sqrt{e}$

(2)　$2x-1=ke^{-x}$

$(2x-1)e^x=k$ とすると この方程式の実数解の個数は 曲線 $y=(2x-1)e^x$ と 直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

(1)① のグラフより 異なる実数解の個数は

$k\geqq0$ のとき　1個

$-\frac{2}{\sqrt{e}}<k<0$ のとき　2個

$k=-\frac{2}{\sqrt{e}}$ のとき　1個

$k<-\frac{2}{\sqrt{e}}$ のとき　0個

(3)①

$g(x)=x^2-x+ae^{-x}$

$g'(x)=2x-1-ae^{-x}$

$g(x)$がちょうど2つの極値をもつとき, 方程式 $g'(x)=0$が異なる2つの実数解をもち, かつ そのxの値を境目にして $g'(x)$の符号の変化が2回起これば よい。

$g'(x)=0$ のとき　$2x-1=ae^{-x} \Longleftrightarrow (2x-1)e^x=a$

だから, (2)より

$-\frac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ のとき, $g'(x)=0$は異なる2つの実数解をもつ

かつ (1)のグラフより そのxの値を境目にして $g'(x)$の符号が 2回変化する。

よって　$-\frac{2}{\sqrt{e}}<a<0$

②

$g'(0)=0$ かつ $x=0$の前後で $g'(x)$の符号の変化が起これば よい。

$g'(x)=2x-1-ae^{-x}$ より

$g'(0)=-1-a=0$　∴ $a=-1$

このとき　$g(x)=x^2-x-e^{-x}$

$g'(x)=2x-1+e^{-x}$

$g'(x)=0$とすると　$2x-1+e^{-x}=0 \Longleftrightarrow (2x-1)e^x=-1$

だから (2)より $k=-1$とすると, $g'(x)=0$は 異なる2つの実数解を もつことが分かり　2解を $x=\alpha,\ 0$ $(\alpha<0)$とする

x	…	α	…	0	…
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$g(\alpha)$	↘	-1	↗

増減表より

$a=-1$ のとき 確かに $x=0$で 極値をもつ

よって　$a=-1$

8　60点

受験番号		得点 その4	60点	得点合計	250点