令和４年度

高等学校【数　学】解答用紙

（その１）

1　(1) 2点　(2) 3点　(3) 3点　(4) 各3点×4

(1)	（ウ）	(2)	学校運営協議会（制度） （コミュニティ・スクール）	(3)	（オ）

(4)	①	数学的活動	②	体系的
	③	統合的	④	数学のよさ

1　20点

2　各10点×10

(1)	$a=-2$	(2)	$\sqrt{2}$
(3)①	$1\pm\sqrt{3}\,i$	(3)②	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
(4)①	ア $\lim_{x\to a} f(x)$　イ $f(a)$	(4)②	$a=-\dfrac{25}{2}$
(5)	$\dfrac{y+z}{2x}=1,\ -\dfrac{1}{2}$	(6)	$S_n=(4n-1)\cdot 3^n+1$
(7)①	$(1,2)$	(7)②	$3x+4y-11$

2　100点

受験番号		得点 その1	120点

令和４年度

高等学校【数　学】解答用紙

（その２）

3　(1) 各５点×４　(2) 15点　(3) 15点

(1)

①	$\frac{1}{18}$	②	$\frac{1}{72}$
③	$\frac{1}{36}$	④	$\frac{1}{24}$

(2)

18を2以上6以下の自然数の積で作る方法は

$18=3\times6=2\times3\times3$

だけである。

したがって，1回目からn回目までの積が18になる場合とその確率は，次の(i)，(ii)の通り。

(i)　3の目が1回，6の目が1回，
1の目が$(n-2)$回出るとき
確率は

$$\frac{n!}{1!1!(n-2)!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}$$
$$=\frac{n(n-1)}{6^n}$$

(ii)　2の目が1回，3の目が2回，
1の目が$(n-3)$回出るとき
確率は

$$\frac{n!}{1!2!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot6^n}$$

(i)と(ii)は互いに排反であるから，

$$p_n=\frac{n(n-1)}{6^n}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot6^n}$$
$$=\frac{n(n-1)\{2+(n-2)\}}{2\cdot6^n}$$
$$=\frac{n^2(n-1)}{2\cdot6^n}\quad\cdots(\text{答})$$

(3)

まず「1回目からn回目までに出た目の積が18になる」かつ「1回目から$(n-1)$回目までの積は18ではない」…(*)ときは，n回目に1以外の目が出るから，(2)の(i)，(ii)にそって次のように場合分けする。

(i－i)　3が1回，1が$(n-2)$回出て，
n回目に6が出るとき

確率は ${}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{n-1}{6^n}$

(i－ii)　6が1回，1が$(n-2)$回出て，
n回目に3が出るとき

確率は ${}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{n-1}{6^n}$

(ii－i)　3が2回，1が$(n-3)$回出て，
n回目に2が出るとき
確率は

$${}_{n-1}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot6^n}$$

(ii－ii)　2が1回，3が1回，1が$(n-3)$回出て，n回目に3が出るとき
確率は

$$\frac{(n-1)!}{1!1!(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{6^n}$$

以上，4つの事象は互いに排反であるから，
(*)の確率は，

$$\frac{n-1}{6^n}+\frac{n-1}{6^n}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot6^n}+\frac{(n-1)(n-2)}{6^n}$$
$$=\frac{(n-1)(3n-2)}{2\cdot6^n}$$

したがって，求める条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{(n-1)(3n-2)}{2\cdot6^n}}{\dfrac{n^2(n-1)}{2\cdot6^n}}=\frac{3n-2}{n^2}\quad\cdots(\text{答})$$

3

50点

受　験 番　号		得　点 その２	50点

令和４年度

高等学校【数　学】解答用紙

4　　(1) 10 点　(2) 20 点

(1)

点 $(-1,4)$ が D に含まれるとは，直線の方程式に $x=-1$，$y=4$ を代入した

$4=4(t-1)\times(-1)-2t^2-1$

すなわち

$2t^2+4t+1=0$　…①

を満たす実数 t （$t\geqq 0$）が存在するということである。

①より　$t=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ はいずれも負であり，$t\geqq 0$ を満たさない。

したがって，点 $(-1,4)$ は領域 D に含まれない。…(答)

(2)

点 (X,Y) が領域 D に含まれるとは，

$Y=4(t-1)X-2t^2-1$

すなわち

$2t^2-4Xt+(4X+Y+1)=0$　…②

を満たす実数 t （$t\geqq 0$）が存在するということである。

$f(t)=2t^2-4Xt+(4X+Y+1)$ とおくと，

$f(t)=2(t-X)^2+(-2X^2+4X+Y+1)$

放物線 $y=f(t)$ と t 軸との共有点を考える。

(i)　軸 $t=X$ について，$X\leqq 0$ のとき

$f(0)\leqq 0$ であるから，$4X+Y+1\leqq 0$ である。

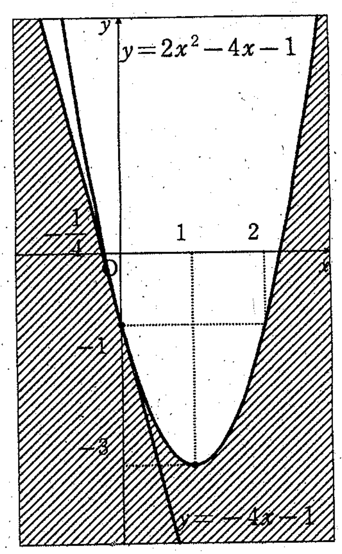
すなわち　$Y\leqq -4X-1$

(ii)　軸 $t=X$ について，$X>0$ のとき

$y=f(t)$ の頂点の y 座標について $f(X)\leqq 0$ であるから，$-2X^2+4X+Y+1\leqq 0$ である。

すなわち　$Y\leqq 2(X-1)^2-3$

以上 (i), (ii) により，領域 D は図の斜線部（境界線を含む）。



4

30 点

受　験 番　号		得　点 その３	30 点

高等学校【数　学】解答用紙

5　(1) 各 5 点 × 2　(2) 15 点　(3) 10 点　(4) 15 点

(1)

①	$\dfrac{-2\log x+1}{x^3}$
②	$\dfrac{6\log x-5}{x^4}$

(2)

$f'(x)>0$ とすると $-2\log x+1>0$ より

$0<x<\sqrt{e}$

$f''(x)>0$ とすると $6\log x-5>0$ より

$x>e^{\frac{5}{6}}$

増減，凹凸は下表の通りである。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	$e^{\frac{5}{6}}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	$\dfrac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$	↘

したがって，

極大値　$\dfrac{1}{2e}$　（$x=\sqrt{e}$ のとき）

極小値　なし　…(答)

変曲点の座標　$\left(e^{\frac{5}{6}},\ \dfrac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}\right)$

(3)

l の接点を $\left(t,\ \dfrac{\log t}{t^2}\right)$（$t>0$）とおくと，

接線 l の方程式は

$$y-\frac{\log t}{t^2}=\frac{-2\log t+1}{t^3}(x-t)\quad\cdots①$$

原点を通るので

$$0-\frac{\log t}{t^2}=\frac{-2\log t+1}{t^3}\cdot(-t)$$

$$\log t=\frac{1}{3}$$

$$t=e^{\frac{1}{3}}\quad（t>0 を満たす）$$

l の方程式は，① より

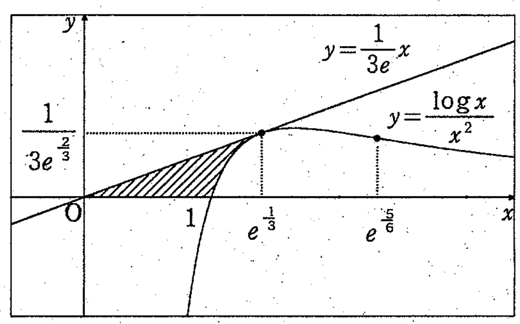
$$y-\frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3e}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)$$

つまり　$y=\dfrac{1}{3e}x$　…(答)

(4)

$\dfrac{\log x}{x^2}=0$ とすると $x=1$

考える部分は図の斜線部。



したがって，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{\log x}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}-\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}+\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\log e^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{3}{2e^{\frac{1}{3}}}-1\quad\cdots(答)$$

5　50 点

受験番号		得点 その4	50点	得点 合計	250点