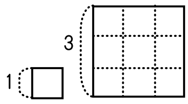
図形3-4 相似比と面積比・体積比　　学習日　月　日（　）

（　）にあてはまる数式がわかるかな？

★図形の相似比と面積比★

２つの図形が相似で，相似比が m : n のとき，
面積比は（ m^2 ）:（ n^2 ）である。

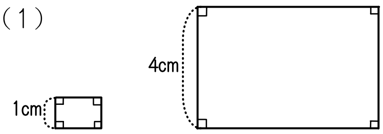


ヒント：相似比が１：３ならば，
面積比は１：（ ９ ）

$1^2 : 3^2$

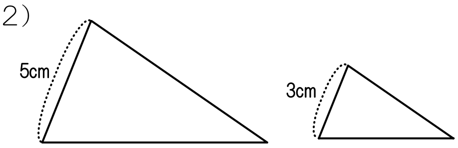
1　次のような相似な２つの図形の面積比を，それぞれ求めなさい。

（1）



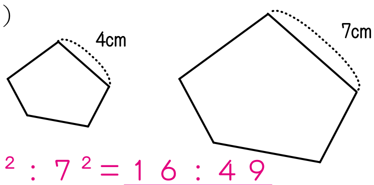
$1^2 : 4^2 = \underline{1 : 16}$

（2）



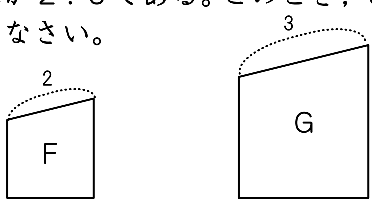
$5^2 : 3^2 = \underline{25 : 9}$

（3）



$4^2 : 7^2 = \underline{16 : 49}$

2　相似な２つの図形Ｆ，Ｇがあり，ＦとＧの相似比が２：３である。このとき，次の各問いに答えなさい。



（1）ＦとＧの面積比を求めなさい。

$2^2 : 3^2 = \underline{4 : 9}$

（2）Ｆの面積が600cm²であるとき，Ｇの面積を求めなさい。

600：（Ｇの面積）＝４：９
４×（Ｇの面積）＝600×９
÷４
（Ｇの面積）＝150×９＝$\underline{1350\ \mathrm{cm}^2}$

（3）Ｇの面積が450m²であるとき，Ｆの面積を求めなさい。

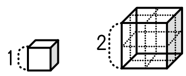
（Ｆの面積）：450＝４：９
９×（Ｆの面積）＝450×４
÷９
（Ｆの面積）＝50×４＝$\underline{200\ \mathrm{m}^2}$

単位に注意！
cm²にしない！

（　）にあてはまる数式がわかるかな？

★立体の相似比と体積比★

２つの立体が相似で，相似比が m : n のとき，
体積比は（ m^3 ）:（ n^3 ）である。

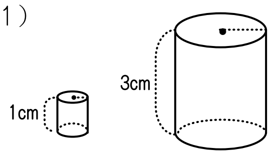


ヒント：相似比が１：２ならば，
体積比は１：（ ８ ）

$1^3 : 2^3$

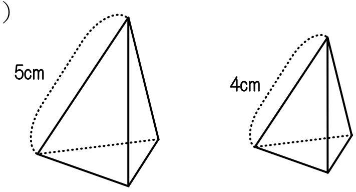
3　次のような相似な２つの立体の体積比を，それぞれ求めなさい。

（1）



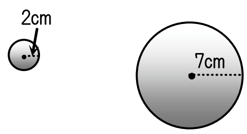
$1^3 : 3^3$
$= \underline{1 : 27}$

（2）



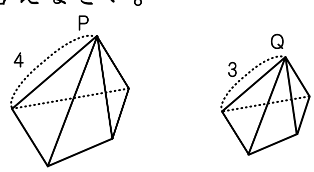
$5^3 : 4^3$
$= \underline{125 : 64}$

（3）



$2^3 : 7^3$
$= \underline{8 : 343}$

4　相似な２つの立体Ｐ，Ｑがあり，ＰとＱの相似比が４：３である。このとき，次の各問いに答えなさい。



（1）ＰとＱの体積比を求めなさい。

$4^3 : 3^3 = \underline{64 : 27}$

（2）Ｐの体積が320cm³であるとき，Ｑの体積を求めなさい。

320：（Ｑの体積）＝64：27
64×（Ｑの体積）＝320×27
÷64
（Ｑの体積）＝５×27＝$\underline{135\ \mathrm{cm}^3}$

（3）Ｑの体積が108m³であるとき，Ｐの体積を求めなさい。

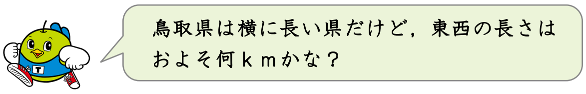
（Ｐの体積）：108＝64：27
27×（Ｐの体積）＝108×64
÷27
（Ｐの体積）＝４×64＝$\underline{256\ \mathrm{m}^3}$

単位に注意！
cm³にしない！

図形3-5 相似の利用

学習日　　月　　日(　　)

１　トリピーは，鳥取県の東西の最長距離を，下のような地図で調べたいと思っています。地図上での長さを測ると６．３ｃｍでした。この地図の縮尺を２００万分の１とするとき，鳥取県の東西の最長距離はおよそ何ｋｍでしょう。

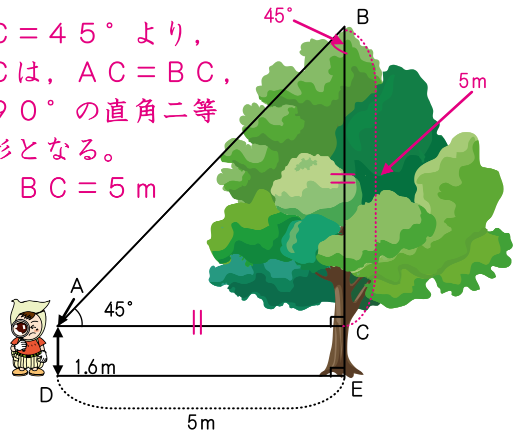


６．３×２０００００＝１２６０００００ｃｍ
＝１２６０００ｍ＝１２６ｋｍ

約１２６ｋｍ

２　らっきいの学校の校庭の木のおよその高さを調べたいと思っています。下の図のように，木の根元から５ｍ離れた位置から木の先端を見上げたら，水平方向に対して４５°上に見えました。らっきいの目の高さを1.6ｍとして，木のおよその高さを求めなさい。

∠ＡＢＣ＝４５°より，
△ＡＢＣは，ＡＣ＝ＢＣ，
∠Ｃ＝９０°の直角二等辺三角形となる。
よって，ＢＣ＝５ｍ

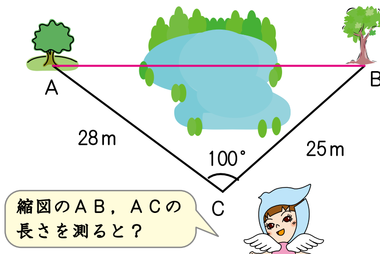


したがって，木の高さは，
ＢＥ＝ＢＣ＋ＣＥ＝５＋１．６＝６．６

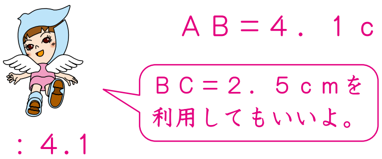
約６．６ｍ

３　トリリンは，池をはさんだ２点Ａ，Ｂ間のおよその距離を求めたいと思っています。直接測ることができないので，次のように工夫しました。

　２点Ａ，Ｂの両方を見ることができる地点Ｃを決め，ＡＣ，ＢＣの長さと，∠ＡＣＢの大きさを測ったら，下の図のようになりました。このとき，ＡＢのおよその距離は何ｍでしょう。

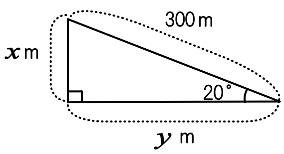


この縮図で，
三角形ＡＢＣの２辺の長さを測ると，
ＡＣ＝２．８ｃｍ
ＡＢ＝４．１ｃｍ



相似を利用して，
２８：ＡＢ＝2.8：4.1
2.8×ＡＢ＝２８×4.1
÷2.8　　ＡＢ＝１０×4.1＝４１　　約４１ｍ

４　傾斜が２０°の大山のゲレンデを３００ｍ滑りました。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1)　垂直方向には，何ｍ下がったことになるでしょう。図のxの値を求めなさい。

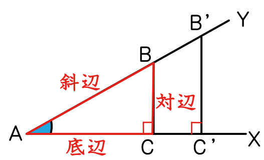
縮図を測って，相似を利用すると，
３００：x＝3.0：1.1
3.0×x＝３００×1.1
$x=\frac{330}{3.0}$＝１１０　　x＝１１０

(2)　水平方向には，何ｍ進んだことになるでしょう。図のyの値を求めなさい。

縮図を測って，相似を利用すると，
３００：y＝3.0：2.8
3.0×y＝３００×２．８
$y=\frac{840}{3.0}$＝２８０　　y＝２８０

高等学校数学への招待

　図のように，∠Ｃ＝９０°の直角三角形ＡＢＣで，さらにもう１つの∠Ａを決めます。△ＡＢＣと△ＡＢ’Ｃ’は２組の角がそれぞれ等しいので，点Ｂのとり方によらず相似になり，右のような３種類の２辺の比（三角比）はすべて一定になります。三角比は，土地や建物の計量，天体の観測に活用されます。



サイン(sineの略)
$\sin A = \frac{対辺}{斜辺}$

コサイン(cosineの略)
$\cos A = \frac{底辺}{斜辺}$

タンジェント(tangentの略)
$\tan A = \frac{対辺}{底辺}$

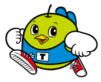
円周角の定理

学習日　月　日(　)

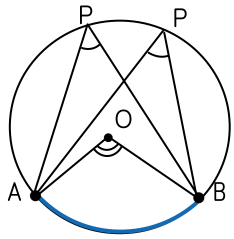
1　次の( )にあてはまる言葉や記号を答えなさい。

円Oで，$\overset{\frown}{AB}$を除いた円周上の点をPとするとき，∠APBを$\overset{\frown}{AB}$に対する(円周角(えんしゅうかく))，∠AOBを$\overset{\frown}{AB}$に対する(中心角)という。また，$\overset{\frown}{AB}$を∠APBに対する(弧(こ))という。

(　　)にあてはまる言葉がわかるかな？

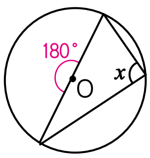


★円周角の定理★
①同じ弧に対する円周角の大きさは（等しい）。
②１つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの（半分）である。



2　次の図で，∠x，∠y，∠z，∠wの大きさを求めなさい。ただし，点Oは円の中心とする。

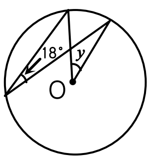
(1)



中心角が180°だから，
円周角は$\frac{1}{2}$×180°＝90°

∠x＝９０°

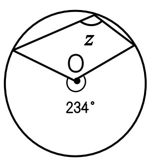
(2)



円周角が18°だから，
中心角は2×18＝36°

∠y＝３６°

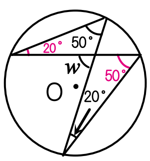
(3)



中心角が234°だから，
円周角は$\frac{1}{2}$×234＝117°

∠z＝１１７°

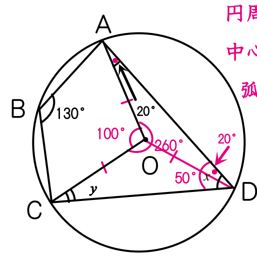
(4)



円周角は等しいから，
図より，w＝20＋50＝70°

∠w＝７０°

3　図のように，円上の４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄについて，四角形ＡＢＣＤを考える。∠Ｂ＝１３０°のとき，∠x，∠yの大きさを求めなさい。ただし，点Oは円の中心とする。

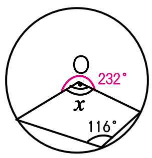


円周角が130°より，
中心角は130×2=260°
弧ＡＢＣの中心角は100°
よって，弧$\overset{\frown}{ABC}$に対する
円周角x＝50°
△ＯＡＤはＯＡ＝ＯＤの
二等辺三角形だから，
∠ＯＡＤ＝∠ＯＤＡ＝20°
△ＯＣＤもＯＣ＝ＯＤの二等辺三角形だから，
y＝∠ＯＤＣ＝50－20＝30°

∠x＝５０°	∠y＝３０°

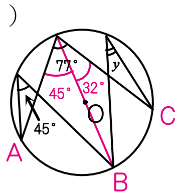
4　次の図で，∠x，∠y，∠z，∠wの大きさを求めなさい。ただし，点Oは円の中心とする。

（１）円周角が１１６°だから，中心角は
２×１１６＝２３２°
x＝360－232＝128°



∠x＝１２８°

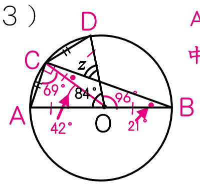
（２）



$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は４５°
７７－４５＝３２°より，
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角y＝３２°

∠y＝３２°

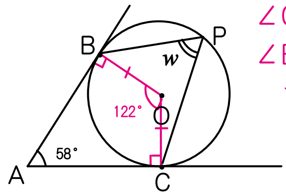
（３）



ＡＢは直径より∠ＡＣＢ＝90°
中心角の半分より∠ＡＯＣ＝42°
∠ＯＣＡ＝（180－42）÷2＝69°
∠ＯＣＢ＝∠ＯＢＣ＝90-69=21°
z＝180-96-21=63°

∠z＝６３°

（４）
半直線ＡＢ，ＡＣは円Ｏにそれぞれ点Ｂ，Ｃで接している。



∠OBA=∠OCA=90°
∠BOC=360-58-90-90=122°
中心角が122°より，
円周角w=122÷2=61°

∠w＝６１°

図形3-7 三平方の定理　　学習日　月　日(　)

ピタゴラスの発見

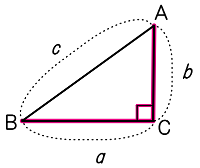
今から約2500年前，古代ギリシャの数学者ピタゴラスは，三平方の定理を発見しました。発見者の名前をとって，ピタゴラスの定理とも呼ばれます。

(　　)にあてはまる記号がわかるかな？

★円周角の定理★

直角三角形の直角をはさむ２辺の長さをa，b，斜辺の長さをcとすると，次の関係が成り立つ。

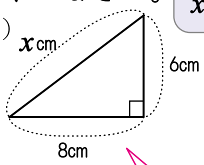
$a^2 (+) b^2 (=) c^2$



1　次の図の直角三角形で，xの値を，それぞれ求めなさい。

xは辺の長さだから，正の数よ！

(1)



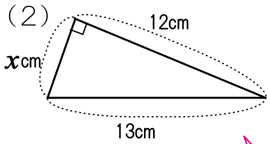
$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$x > 0$より，

$x = 10$

３：４：５の直角三角形に気づいた？

(2)



$13^2 - 12^2$の計算が簡単にできないかな？
因数分解の公式を使って…
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$x^2 + 12^2 = 13^2$

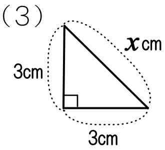
$x^2 = 13^2 - 12^2$

$= (13 + 12)(13 - 12) = 25 \times 1 = 25$

５：１２：１３も直角三角形！

$x > 0$より，$x = 5$

(3)



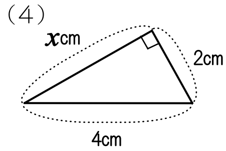
$x^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

$x > 0$より，

$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

１：１：$\sqrt{2}$は三角定規の直角二等辺三角形！

(4)



$x^2 + 2^2 = 4^2$

$x^2 = 4^2 - 2^2$

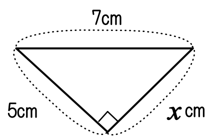
$= 16 - 4$

$= 12$

$x > 0$より，$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

１：２：$\sqrt{3}$も三角定規の直角三角形！

(5)



$x^2 + 5^2 = 7^2$

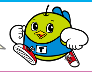
$x^2 = 7^2 - 5^2$

$= 49 - 25$

$= 24$

$x > 0$より，$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

(　　)にあてはまる記号がわかるかな？



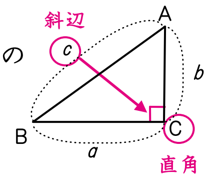
★三平方の定理の逆★

ＢＣ＝a，ＣＡ＝b，ＡＢ＝cの直角三角形ＡＢＣに，

$a^2 + b^2 = c^2$　cの対角がC

の関係が成り立つならば，

△ＡＢＣは，∠（ Ｃ ）＝９０°の直角三角形である。



2　次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形はどれですか。記号で答えなさい。

㋐　8cm，15cm，17cm

$8^2 = 64$，$15^2 = 225$，$17^2 = 289$で，

$64 + 225 = 289$より，$8^2 + 15^2 = 17^2$が成り立つから○

㋑　9cm，12cm，15cm　３：４：５の直角三角形！

$9^2 = 81$，$12^2 = 144$，$15^2 = 225$で，

$81 + 144 = 225$より，$9^2 + 12^2 = 15^2$が成り立つから○

㋒　3cm，14cm，$2\sqrt{30}$ cm

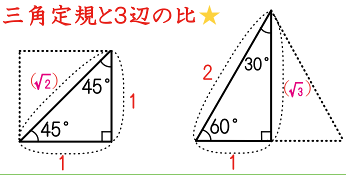
$3^2 = 9$，$14^2 = 196$，$(2\sqrt{30})^2 = 120$で，

$9 + 120 = 129 \neq 196$より，×

答え　㋐，㋑

(　　)にあてはまる数がわかるかな？

★三角定規と3辺の比★

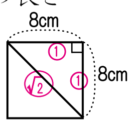


3　次の各値を求めなさい。

(1)　1辺の長さが8cmの正方形の対角線の長さ

三角定規の直角二等辺三角形だから，

1 : 1 : $\sqrt{2}$ をあてはめる。　$8\sqrt{2}$ cm



(2)　1辺の長さが10cmの正三角形の面積

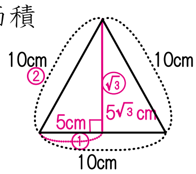
三角定規の直角三角形だから，

1 : 2 : $\sqrt{3}$をあてはめると，高さは，$5\sqrt{3}$ cm

よって，面積は，

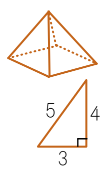
$\frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

$25\sqrt{3}$ cm^2



古代エジプトのピラミッドの神秘

ピラミッドは，底面が正方形の正四角錐ですが，その直角は縄を３：４：５の比にして正確に測られたといわれています。

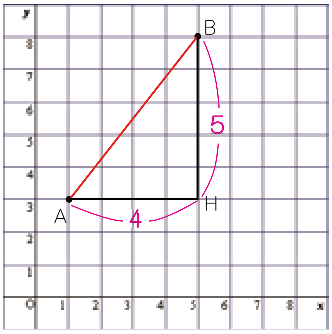


図形3-8 三平方の定理の利用　　学習日　月　日(　)

1　次の座標をもつ2点間の距離を求めなさい。

(1)　A(1, 3), B(5, 8)

図のように，Aからx軸に平行にひいた直線と，Bからy軸に平行にひいた直線の交点をHとする。



AH＝(5)－(1)＝(4),

BH＝(8)－(3)＝(5),

∠AHB＝(90)°だから，

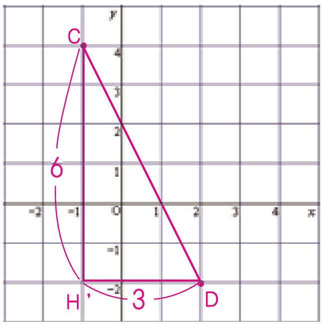
三平方の定理より，

$AB^2＝(4)^2＋(5)^2＝16＋25＝41$

AB＞0だから，AB＝$\sqrt{41}$

(2) C(－1, 4), D(2, －2)

図のように，Dからx軸に平行にひいた直線と，Cからy軸に平行にひいた直線の交点をH'とする。



CH'＝4－(－2)＝6,

DH'＝2－(－1)＝3,

$CD^2＝6^2＋3^2$

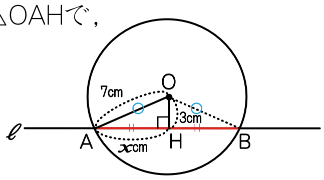
＝36＋9

＝45

CD＞0だから，CD＝$\sqrt{45}＝3\sqrt{5}$

2　半径が7cmの円Oが，直線ℓと2点A, Bで交わっている。中心Oから弦ABまでの距離が3cm(図のOH＝3cm)であるとき，弦ABの長さを求めなさい。

AHの長さを$x$cmとすると，△OAHで，



$x^2＋3^2＝7^2$

$x^2＝7^2－3^2$

＝49－9

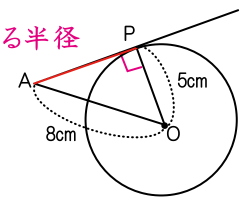
＝40

x＞0より，$x＝\sqrt{40}＝2\sqrt{10}$

よって，AB＝2x　＝2×$2\sqrt{10}$＝$4\sqrt{10}$　　$4\sqrt{10}$ cm

3　半径が5cmの円Oに，円外の点Aから接線をひき，その接点をPとする。中心Oと点Aとの距離が8cmのとき，APの長さを求めなさい。

円の接線は，その接点を通る半径と垂直だから，



$AP^2＋5^2＝8^2$

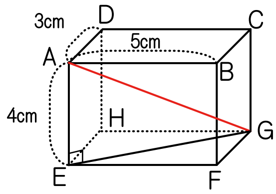
$AP^2＝8^2－5^2$

＝64－25

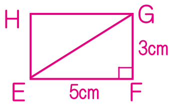
＝39

AP＞0より，AP＝$\sqrt{39}$　　$\sqrt{39}$ cm

4　図のように，AB＝5cm, AD＝3cm, AE＝4cmの直方体ABCD－EFGHで，対角線AGの長さを求めなさい。



底面EFGHは図の長方形で，



$EG^2＝5^2＋3^2$

＝25＋9

＝34

∠AEG＝90°より，

$AG^2＝AE^2＋EG^2$

$＝4^2＋34$

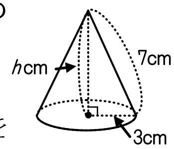
＝16＋34

$AG^2＝50$

AG＞0より，

AG＝$\sqrt{50}＝5\sqrt{2}$　　$5\sqrt{2}$ cm

5　図のように，底面の半径が3cm，母線の長さが7cmである円錐がある。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1)　円錐の高さを$h$cmとするとき，hの値を求めなさい。

$h^2＋3^2＝7^2$

$h^2＝7^2－3^2$

＝49－9

＝40

h＞0より，

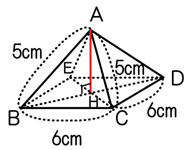
$h＝\sqrt{40}＝2\sqrt{10}$

(2)　円錐の体積を求めなさい。

$\frac{1}{3}×\pi×3^2×2\sqrt{10}＝6\sqrt{10}\pi$　　$6\sqrt{10}\pi$ cm^3

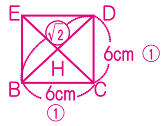
$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

6　図のように，正四角錐A－BCDEがあります。底面BCDEは1辺の長さが6cmの正方形で，他の辺の長さは5cmです。頂点Aから底面BCDEにひいた垂線と底面との交点をHとするとき，次の各問いに答えなさい。



(1)　BHの長さを求めなさい。

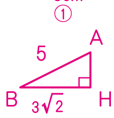
底面は1辺6cmの正方形で，



図より，BD＝$6\sqrt{2}$

よって，BH＝$\frac{1}{2}$BD＝$\frac{1}{2}×6\sqrt{2}＝3\sqrt{2}$　　$3\sqrt{2}$ cm

(2)　AHの長さを求めなさい。



図より，$AH^2＋(3\sqrt{2})^2＝5^2$

AH^2＋18＝25

AH^2＝7　　AH＞0より，AH＝$\sqrt{7}$　　$\sqrt{7}$ cm

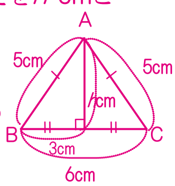
(3)　正四角錐A－BCDEの体積を求めなさい。

$\frac{1}{3}×(6×6)×\sqrt{7}＝12\sqrt{7}$

$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)　　$12\sqrt{7}$ cm^3

(4)　正四角錐A－BCDEの表面積を求めなさい。

側面は図のような二等辺三角形で，その高さをh cmとすると，



$h^2＋3^2＝5^2$

h^2＝25－9＝16

h＞0より，h＝4

3：4：5の直角三角形！

よって，表面積は，

(側面の三角形4つ)　(底面)

$4×(\frac{1}{2}×6×4)＋6×6$

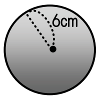
＝48＋36＝84

84 cm^2

図形3-9 中学生の図形のまとめ　　学習日　月　日(　)

1　次の図のような立体の表面積Sと体積Vを，それぞれ求めなさい。ただし，円周率はπとする。

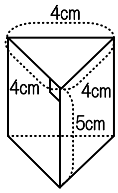
(1)　半径が6cmである球



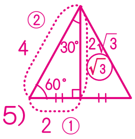
$S=4\pi\times6^2=144\pi$　　$144\pi\ \mathrm{cm}^2$

$V=\frac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$　　$288\pi\ \mathrm{cm}^3$

(2) 底面が1辺の長さ4cmの正三角形，高さが5cmである正三角柱



底面の正三角形の高さは，



図より，$2\sqrt{3}$

$S=2\times(\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3})+3\times(4\times5)$

(底面の正三角形2つ)　(側面の長方形3つ)

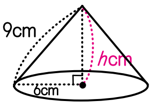
$=8\sqrt{3}+60$　　$8\sqrt{3}+60\ (\mathrm{cm}^2)$

(底面積)　(高さ)

$V=(\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3})\times5$

$=20\sqrt{3}$　　$20\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

(3) 底面の半径が6cm，母線の長さが9cmである円錐

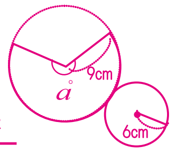


側面の展開図は，半径9cmのおうぎ形で，その中心角をa°とすると，

(おうぎ形の弧の長さ)=(底面の円周)だから，

$2\pi\times9\times\frac{a}{360}=2\pi\times6$

これを解くと，$a=240$°



$S=\pi\times9^2\times\frac{240}{360}+\pi\times6^2$

$=54\pi+36\pi=90\pi$　　$90\pi\ \mathrm{cm}^2$

円錐の高さを$h$cmとすると，$6^2+h^2=9^2$

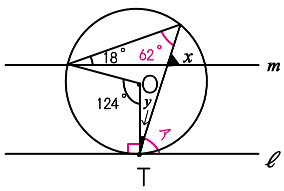
$h^2=81-36=45$

$h>0$より，$h=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

よって，$V=\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times3\sqrt{5}=36\sqrt{5}\pi$

$\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)　　$36\sqrt{5}\pi\ \mathrm{cm}^3$

2　次の図で，円Oは点Tで直線ℓと接し，$\ell/\!/m$である。このとき，$\angle x$，$\angle y$の大きさを求めなさい。ただし，点Oは円の中心とする。



中心角124°の円周角は124÷2=62°だから，

$x=18+62=80$°

同位角より，ア＝x＝80°

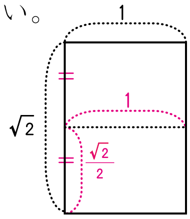
OT⊥ℓより，$y=90-80=10$°

よくがんばりました。
高校生になっても
頑張ろう！

$\angle x$＝８０°	$\angle y$＝１０°

3　図形の相似について，次の各問いに答えなさい。

(1) 教科書やノート，コピー用紙などの長方形の，横と縦の長さの比は，1：$\sqrt{2}$　です。これを，半分に折ったときにできる長方形の縦と横の長さの比を求めなさい。



図より，求める比は，

$\frac{\sqrt{2}}{2}:1=\sqrt{2}:2$

$=\sqrt{2}:(\sqrt{2})^2$

$=1:\sqrt{2}$

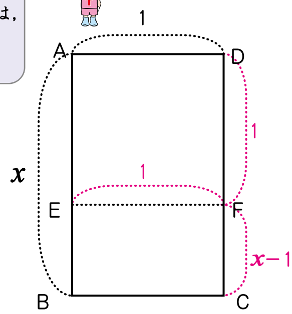
もとの長方形と，半分に折ってできた長方形は，相似といえるかな？　→いえます。
$\sqrt{2}$=1.41421356…（一夜一夜に人見頃(ひとよひとよにひとみごろ)）と覚えるね！

この1：$\sqrt{2}$ の比をシルバー比ともいい，およそ3：4になります。ダ・ビンチの傑作「モナ・リザ」の絵もほぼこの比になっています。

(2) 図書カード，名刺，新書判の本などの長方形では，長方形から正方形を切り取った残りの長方形が，もとの長方形と相似になっています。もとの長方形の横と縦の長さの比を1：x($x>1$)とするとき，xの値を求めなさい。

二次方程式の解の公式
二次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は，

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



四角形ABCD∽四角形BCFE

AB：BC＝AD：BE

$x:1=1:x-1$より，

$x^2-x-1=0$を解くと，

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$で，$x>1$より，

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

この1：xの比を黄金比(ゴールデンナンバー)といいます。
$\sqrt{5}$=2.2360679…（「富士山麓(に)オウム鳴く」と覚えます）として，計算すると，1：1.6180…で約5：8になります。この比は，美しい比として，さまざまな美術作品（ミロのビーナス，葛飾北斎の「富嶽三十六景」など）や建築物（パルテノン神殿，ピラミッドなど）に見ることができます。また，自然の中（オウムガイの渦巻きなど）にもこの黄金比が潜んでいます。正五角形の1辺の長さと対角線の長さの比も黄金比になっています。他にも身の周りの黄金比をさがしてみよう。（カレンダーやテーブル，お菓子箱など）