高等学校【数　学】正解・解答例

1

（1）（ク）

（2）①　人間としての在り方生き方　　②　道徳教育推進教師　　③　特別活動

（3）①　（ウ）　　②　（カ）　　③　（ク）　　④　（シ）

配点：（1）２点、（2）各２点×３、（3）各３点×４　　$\boxed{\text{２０点}}$

2

（1）①　$\dfrac{5}{9}$　　②　$\dfrac{\sqrt{105}}{3}$

（2）①　$\dfrac{1}{32}$　　②　（ア）

（3）　$\dfrac{1}{2}$

（4）①$(2, -1)$　　②$25$

（5）①　$t \geqq 2\sqrt{2}$　　②　$-8\sqrt{2}$

（6）　$m \leqq 11$

（7）①　$1+i$　　②　$3\sqrt{3}$

配点：（1）（2）（4）（5）（7）各５点×１０、（3）（6）各１０点×２　$\boxed{\text{７０点}}$

3

$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta$ である。

$\theta = 0$ のとき $(x, y) = (2, 0)$,　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $(x, y) = (0, 0)$

x と θ の対応は右表のようになる。

したがって，求める面積は

x	$0 \quad \rightarrow \quad 2$
θ	$\dfrac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad 0$

$$S = \int_0^2 y\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2\theta \cdot (-2\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{\text{１０点}}$

4

(1)　$-3x+4y=k$ …① とおく。

直線 ① が円 $x^2+y^2=4$ …② と共有点をもつような k の値の範囲を求める。

(円 ② の中心 (0, 0) と直線 ① との距離) ≦ (円 ② の半径)

であるから，点と直線の距離の公式により

$$\frac{|-k|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} \leqq 2$$

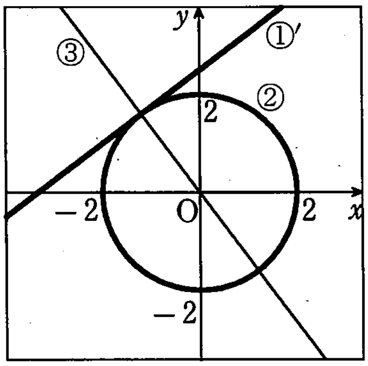
これより，$-10 \leqq k \leqq 10$

$k=10$ のとき，直線 ① と円 ② とは接する。

このとき直線 ① は $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$ … ①′

直線 ①′ に垂直で円の中心を通る直線の方程式は $y=-\frac{4}{3}x$ …③

接点は直線 ①′ と直線 ③ との交点であるから $\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$



(答)　最大値 10 （ $x=-\frac{6}{5}$， $y=\frac{8}{5}$ のとき ）

(2)　$x^2+y^2=4$ を満たす (x, y) は

$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　（ $0\leqq\theta<2\pi$ ）とおける。

このとき，$-3x+4y = -6\cos\theta+8\sin\theta = 10\sin(\theta+\alpha)$ …①

(ただし，α は $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$)

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\alpha \leqq \theta+\alpha < 2\pi+\alpha$ であるから，

① は，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のときに最大値 $-3x+4y=10$ をとる。

このとき，$x=2\cos\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\alpha=-\frac{6}{5}$，

$$y=2\sin\theta=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha=\frac{8}{5}$$

(答)　最大値 10 （ $x=-\frac{6}{5}$， $y=\frac{8}{5}$ のとき ）

配点：（1）１５点、（2）１５点　　$\boxed{３０点}$

5

（1）　$p_1=\dfrac{2}{5}$　　$p_2=\dfrac{13}{25}$

（2）　$(n+1)$ 回の試行の後に合計得点が偶数になる場合は，

i)　n 回目までの合計得点が偶数で，かつ $(n+1)$ 回目の得点が偶数となるとき

ii)　n 回目までの合計得点が奇数で，かつ $(n+1)$ 回目の得点が奇数となるとき

のいずれかで，これらは互いに排反である。

1 回の試行で得点が偶数となるのは $p_1=\dfrac{2}{5}$，奇数となるのは $1-p_1=\dfrac{3}{5}$ であるから，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{2}{5}+(1-p_n)\times\frac{3}{5}$$

すなわち，$p_{n+1}=-\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}$

$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列である。

ゆえに，$p_n-\dfrac{1}{2}=\left(-\dfrac{1}{10}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$　すなわち　$p_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{2}$　(答)

（3）　n 回の試行とも得点が偶数である確率は $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ であるから，求める確率は

$$\frac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{2}}=\frac{2^{n+1}}{(-1)^n+5^n}$$　(答)

配点：（1）１０点、（2）１０点、（3）１０点　$\boxed{\text{３０点}}$

6

（1）　$f'(x)=\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$　　$f''(x)=\dfrac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}$

（2）　$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}=\dfrac{x^3}{(x-2)(x+2)}$ であるから，定義域は $x\fallingdotseq 2$，$x\fallingdotseq -2$

また，$f'(x)=\dfrac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x-2)^2(x+2)^2}$，$f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x-2)^3(x+2)^3}$

したがって，増減，凹凸は下表のとおり。

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	/	$+$	0	$-$	/	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	/	↘	0	↘	/	↘	$3\sqrt{3}$	↗

$$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\quad \lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2+0}f(x)=\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\quad \lim_{x\to -2-0}f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty$$ である。

さらに $f(x)=x+\dfrac{4x}{x^2-4}$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0$$

である。したがって，直線 $x=2$，$x=-2$，$y=x$ は $y=f(x)$ の漸近線である。

(答)　極大値 $-3\sqrt{3}$　（$x=-2\sqrt{3}$ のとき）

極小値 $3\sqrt{3}$　（$x=2\sqrt{3}$ のとき）

変曲点 $(0,0)$　　漸近線　$x=2$，$x=-2$，$y=x$

（3）　$1<a\leqq\dfrac{16}{9}$

配点：（1）１０点、（2）２０点、（3）１０点　　$\boxed{４０点}$