平成28年度

中学校・高等学校【数　学】解答用紙

（その１）

1　１２点

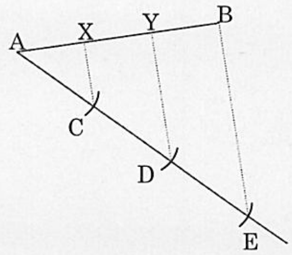
（解答例）

①点Ａから適当な長さの半直線を引き，コンパスでＡから等間隔に３つの点をとり，それぞれ点Ｃ，Ｄ，Ｅとする。

②点ＢとＥを結ぶ。

③三角定規を使って点Ｃ，Ｄから線分BEと平行な線を引き，線分ABと交わる点をそれぞれＸ，Ｙとする。

このＸ，Ｙにより，線分ABは三等分される。



1　１２点

2　(1) １０点　(2) １０点

(1)	128	(2)	$y=10x$

2　２０点

3　(1) １０点　(2) １２点　(3) １２点

(1)	80　（個）	(2)	$\frac{1}{2}n(n+1)(n^2-n+1)$
(3)	$\frac{1}{3}n(n^2+2)$　（個）		

3　３４点

4　(1) １２点　(2) １０点　(3) １２点

(1)

（解答例）

（証明）

△OSCと△OTDにおいて，

正方形の対角線は，それぞれの中点で垂直に交わるから

OC=OD･･･①

また，∠OCS=∠ODT=45°･･･②

次に，∠SOC+∠COT=90°,

∠TOD+∠COT=90°

だから　∠SOC=∠TOD･･･③

よって，①，②，③より，

１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△OSC≡△OTD　証明終

(2)

(1)より四角形OSCTの面積は，△OCDの面積に等しい。

よって，求める面積は，

$\frac{1}{2}\times 12\times 6=36\ (cm^2)$･･･答

(3)

図２において，辺BCの点Ｂ側を延長した線上に，∠PAE=45°となる点Ｅをとると，△AQD≡△AEBである。このことより，△APQ≡△APEがいえる。

よって，△APEの面積は$275cm^2$である。

また，△APEにおいてPE=PQ=$22cm$だから

$\frac{1}{2}\times 22\times$ AB=275　　よって，AB=25

ゆえに，もとの正方形ABCDの面積は

$25\times 25=625\ (cm^2)$･･･答

4　３４点

受験番号		得点 その１	１００点

平成28年度

中学校・高等学校【数　学】解答用紙

（その2）

5　各１０点×４

(1)

データを小さい順に並べると

40，42，52，59，65，68，69，69，76

第１四分位数は $\dfrac{42+52}{2}=47$，第３四分位数は $\dfrac{69+69}{2}=69$

よって，四分位偏差は，$\dfrac{69-47}{2}=11\cdots\boxed{\text{答}}$

また，平均値は，

$$\frac{40+42+52+59+65+68+69+69+76}{9}=60$$

よって，求める標準偏差をsとすると，

$$\begin{aligned}s^2=\frac{1}{9}\{&(40-60)^2+(42-60)^2+(52-60)^2+(59-60)^2\\&+(65-60)^2+(68-60)^2+(69-60)^2+(69-60)^2\\&+(76-60)^2\}\\=144&\end{aligned}$$

ゆえに，$s>0$ だから，$s=12\cdots\boxed{\text{答}}$

(2)

120!を計算したときの末尾に並ぶ0の個数は，120!を素因数分解したときの素因数5の個数に一致する。
1から120までの自然数のうち，
5の倍数の個数は120を5で割ったときの商で24
5^2の倍数の個数は120を25で割ったときの商で4
$120<5^3$であるから $5^n(n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって，素因数5の個数は，24+4=28

したがって，0は28個連続して現れる。$\cdots\boxed{\text{答}}$

(3)

与式$=5\sin(\theta+\alpha)+2$ とおける。ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角とする。

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ だから

$-\sin\alpha\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$

$-\dfrac{4}{5}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$

よって，$-4\leqq 5\sin(\theta+\alpha)\leqq 5$

ゆえに，$-2\leqq 5\sin(\theta+\alpha)+2\leqq 7$

したがって，求める最大値は7，最小値は$-2\cdots\boxed{\text{答}}$

(4)

まず１回の試行で白玉の出る確率を求める。

(ｉ) 白玉１個，赤玉２個のとき

$$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

(ii) 白玉２個，赤玉１個のとき

$$\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3\times2}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

(iii) 白玉３個のとき

$$\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

よって，１回の試行で白玉が奇数個取り出される確率は

$\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$ であり，偶数個取り出される確率は $\dfrac{3}{5}$ である。

したがって，求める確率は，１回目に白玉が奇数個で２回目に白玉が偶数個取り出されるときか，１回目に白玉が偶数個で２回目に白玉が奇数個取り出されるときであるから

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}\cdots\boxed{\text{答}}$$

5
４０点

受験番号		得点 その2	４０点

平成28年度

中学校・高等学校【数　学】解答用紙

（その3）

6　(1) 7点　(2) 7点　(3) 8点　(4) 10点

(1)

正四面体だから $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$ である。よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{9}{2}$ より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ だから $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=9$

よって，$\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$ だから $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3\cdots$ 答

したがって，正四面体ABCDは一辺の長さが3で，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は120°だから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{2}\cdots$ 答

(2)

正四面体ABCDだから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{9}{2}$

点Pは辺ABを $x:(1-x)$ の比に内分する点だから

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}\right)=\left(\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-x\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+x^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

$=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}x-\dfrac{9}{2}x+9x^2=9x^2-9x+\dfrac{9}{2}\cdots$ 答

次に，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB}$ だから

$\left|\overrightarrow{PC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+x^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=9-9x+9x^2$

$=9x^2-9x+9\cdots$ 答

(3)

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{PD}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|^2}$ だから (2) より

$\cos\theta=\dfrac{9x^2-9x+\frac{9}{2}}{9x^2-9x+9}=\dfrac{18x^2-18x+9}{18x^2-18x+18}=\dfrac{2x^2-2x+1}{2x^2-2x+2}$

$=\dfrac{2x^2-2x+2-1}{2x^2-2x+2}=1-\dfrac{1}{2x^2-2x+2}=1-\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$

ここで，$2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ は，$0<x<1$ において，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき

最小となるから $\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$ は最大となり，$\cos\theta$ も最小となる。したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき $\cos\theta$ は最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。$\cdots$ 答

(4)

(3)より点Pは辺ABの中点である。
また，正四面体ABCDだから，点Rは△BCDの重心である。

よって，$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

次に，3点A，Q，Rは同一直線上にあるから，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AR}$ となる実数 k が存在する。
したがって

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AC}+k\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{1}{3}k\times2\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AD}$

また，点Qは平面PCD上の点だから $\dfrac{2}{3}k+\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{3}k=1$

よって，$k=\dfrac{3}{4}$ だから $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AR}$

ゆえに，$AQ:QR=3:1\cdots$ 答

6
32点

受験番号		得点 その3	32点

中学校・高等学校【数　学】解答用紙

7　(1) １０点　(2) ６点　(3) １２点

(1)

定義域は$x>0$，x切片は$(1,0)$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$より，$x$軸，$y$軸は漸近線である。

また，$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$$y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

よって，$y'=0$となるxは$x=e$，$y''=0$となるxは$x=e\sqrt{e}$

増減表をかくと

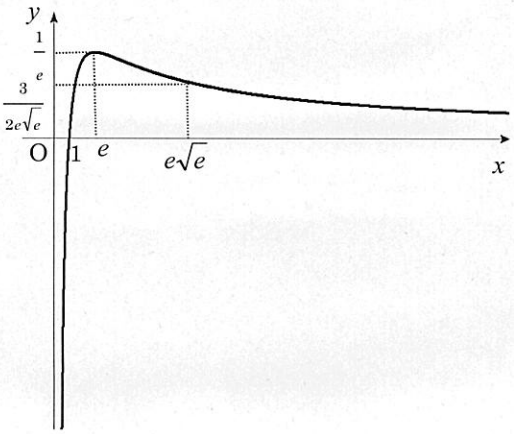
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

よって，

$x=e$のとき，極大値$\dfrac{1}{e}$をとる。

変曲点は，$\left(e\sqrt{e},\ \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

したがって，$y=f(x)$のグラフは下のとおりである。



(2)

$x>0$より$ax=\log x$から$a=\dfrac{\log x}{x}$

$ax=\log x$が実数解をただ１つもつことより，$y=a$のグラフと$y=\dfrac{\log x}{x}$のグラフが，$a>0$において共有点をただ１つもつときを考えればよい。

よって，(1)より$a=\dfrac{1}{e}\cdots$答

(3)

(1)，(2)より$k=e$だから，求める体積Vは

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_1^e\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx\\
&=\pi\int_1^e(-x^{-1})'(\log x)^2dx\\
&=\pi\left[-x^{-1}(\log x)^2\right]_1^e-\pi\int_1^e(-x^{-1})(2\log x)\frac{1}{x}dx\\
&=-\frac{\pi}{e}+2\pi\int_1^e x^{-2}\log x\,dx\\
&=-\frac{\pi}{e}+2\pi\int_1^e(-x^{-1})'\log x\,dx\\
&=-\frac{\pi}{e}+2\pi\left[-x^{-1}\log x\right]_1^e-2\pi\int_1^e(-x^{-1})\frac{1}{x}dx\\
&=-\frac{\pi}{e}-\frac{2\pi}{e}+2\pi\int_1^e x^{-2}dx\\
&=-\frac{3\pi}{e}+2\pi\left[-x^{-1}\right]_1^e\\
&=-\frac{3\pi}{e}-\frac{2\pi}{e}+2\pi\\
&=\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi\cdots\text{答}
\end{aligned}$$

7

２８点

受験番号		得点 その4	２８点	得点 合計	２００点